從UGFN文本角度淺談數學

施耀明
新亞書院 數學

自小學開始，我一直最喜愛數學。若有人問我大學有甚麼事讓我最高興，我一定毫不猶豫地回答：進入了數學系。大學數學十分抽象，我學到很多關於不同數學概念的定理，可是我連那個概念是甚麼都說不出所以然。我不禁疑惑，究竟學習數學即是學甚麼？雖然我到現在都未能給予肯定答案，幸而我在「與自然對話」這科中，對數學的本質和意義都有一些體會。

柏拉圖在《理想國》中描述了理型世界。他認為抽象的、無法感知到的理型才是真實的，我們以五感所感知的，不過是理型在這感官世界的不完美投影。因此我們不能單憑感官獲得真理，必須透過反思，才認識到真實的知識（Lindberg 13–14）。數學研究對象和柏拉圖的「理型」很相似，都是抽象的、理想化的概念，我們很難用感官感知這些概念的本質。例如，無限大在數學上是指大於或等於全部自然數個數的數量。在這個感官世界，無論我們數到多大的自然數，總會遺漏一些更大的，所以我們永不能數盡全部，更無從得知比這個數量更大的量到底有多大。多維空間是線性代數的重要概念，但感官世界只有三維，連時間都計算在內都不過是四維時空，五維空間已經超出我們的感官經驗，普遍的n維空間更加無法想像。單憑感官來學習數學，就如柏拉圖洞喻中的囚徒看陰影來認識事物（Plato 5–6），所得知識是片面，甚至是錯誤的。

即使我們所學的數學概念容易想像，感官都不是全然可靠。在感官世界中，若我們找到很多符合某命題的證據，就會斷言該命題為真。在數學，這樣斷言沒有說服力，因為除非我們能窮舉所有可能，否則永遠無法保證反例不會存在。數學家歐拉曾經猜想：$x^4+y^4+z^4=w^4$ 沒有不平凡的正整數解（賽門・辛 159）。這個猜想自歐拉提出後二百多年間，沒一個人找到反例。若用感官經驗判斷，一般人大概都當這猜想為真了。然而這猜想是假的，哈佛大學的埃爾基斯在1988年成功舉出反例：$2686440^4+15365639^4+18796760^4=20615673^4$（〈歐拉猜想〉）。由此可見，根據感觀和直覺所得的數學結論並不可靠，只有經嚴格證明的數學命題才是真的。就像柏拉圖所指，只有經過反思得來的結論才是真理。

柏拉圖以反思和討論求取真理，數學家如何研究數學？歐幾里德在《幾何原本》中有完滿的示範。《幾何原本》共十三冊，是歷史上廣傳程度僅次於《聖經》的經典著作（〈幾何原本〉）。在第一冊開首，歐幾里德闡明了點、線、面、直角等23個基本定義，然後提出五項公設和五個普遍概念（Euclid 1–2）。歐幾里德用以上內容作為理論基礎，由作圖法開始，逐一證明之後的命題。第一冊共有47項命題，彼此之間並非獨立。它們在邏輯上環環相扣，前面命題是之後命題的前提，通過不斷推論和開展，構成嚴密宏偉的命題建築。即使在以後的卷冊中，仍經常看到第一冊命題的蹤影，就像第11冊命題六闡述：如果兩條直線垂直於同一個平面，則該兩條線互相平行。在證明過程中，歐幾里德將垂直於同一平面的兩條直線分別命名為AB和CD，連結BD，證出角CDB和角ABD是直角（372–373）。在論證的最後一步，他用第一冊的命題28得出AB平行於CD的結論（22）。

若用現代數學的標準來看，《幾何原本》的嚴謹程度尚有改進空間。數理哲學家羅素批評歐幾里德太依賴圖像，運用了本人沒有為意的假設，完備的證明應當不用圖解也能成立。儘管有輕微瑕疵，亦無

損《幾何原本》的偉大。因為《幾何原本》中所展示的做法：用精確定義辨別研究對象、列出公理、闡述各項定理並給予嚴謹證明的做法流傳至今，成為研究數學的必要步驟。和古希臘的數學相比，現代數學對嚴謹的要求更高，研究對象更加廣泛，但在研究的方法和對論證的重視上，兩者明顯一脈相承。集合論（Set Theory）是非常嶄新的數學學科，它最初由康托爾（Cantor）提出，後來策梅洛（Zermelo）提議一套公理化的集合論，連同替代公理和選擇公理，構成包含選擇公理的策梅洛—弗蘭克爾集合論（ZFC Set Theory）(〈策梅洛－弗蘭克爾集合論〉)。數學歸納法是數學證明不可或缺的工具，透過用集合的語言定義自然數，集合論可以證明數學歸納法有效。在證明過程中，我們根據公理，定義適當的集合，利用邏輯推導出結論。雖然研究對象和公理系統都完全不同，這門現代數學的基礎理論，在建構過程中，和歐幾里德二千多年前在《幾何原本》的做法如出一轍。

龐加萊在《科學及方法》一書中，指出科學家研究科學，很多時並非因為研究成果為個人帶來甚麼收益，亦不是該理論對世界有多大貢獻，而是單純欣賞科學理論簡結和內涵廣泛的智性之美（Poincaré 165–166）。如果將一門科學的美定義為簡潔和準確，我想應該沒哪門科學比數學更美麗了。龐加萊認為，研究科學是一個選擇事實的過程，科學家選擇再現機會較大的事實來研究，找出它們的共通點建立理論，然後從特例中找出它們的特異之處，修正理論，不斷重複這一過程（162–164）。數學家卻不滿足於常態，他們希望結論對於所有符合前提的對象都為真。例如畢達哥拉斯定理（Pythagorean theorem）就是一項全稱命題，任意直角三角形兩鄰邊的平方和等於斜邊的平方（Euclid 35–36）。透過證明，數學家可以肯定世界上無限多個直角三角形都符合這條定理，就連大得或小得無法在感官世界找到的直角三角形也是一樣。

數學系有這樣的笑話：「數學系學生見英文字母比見數字更多。」我也曾如此自嘲，但當我明白學習數學並非計算某算術題，而是找出研究對象之間的規律時，我覺得這件事其實理所當然。學習數學的人也選擇物件或事實，但他們的選擇是任意或者全部。例如我想知單數加雙數是否單數，我不會從所有單數中選一個出來，再選出一個雙數和它相加。我會設2m+1是任一單數，2n是任一雙數，相加得2m+1+2n=2m+2n+1=2(m+n)+1，所以它是單數。若我需要驗算，代入相應m、n就完成了。通過一行證明，我可以肯定無限對單雙數相加之和都是單數，這一命題不只普遍正確，更是絕對正確。

數學之美還來自它的嚴謹。一個命題若經過嚴格證明，就必然是真的，任何人從前提出發，經過邏輯推算，都必然得出相同結論。即使直觀上難以接受，亦不能影響該命題的真確。例如《幾何原本》中「整體大於部分」的普遍概念（Euclid 2）在直觀上如此「不證自明」，但康托爾透過構造一一對應的關係，證明出正平方數集雖然是自然數集的部分，卻和自然數集有一樣多的元素，因此兩個集合一樣大（“Galileo’s Paradox”）。任何人可以認為這結論在直觀上難以接受，但除非他能推翻這個證明，否則他必須承認這結論為真。數學固然有其局限，哥德爾證明出，任一蘊涵皮亞諾算術公理（Peano axioms）的公理系統，必然存在不能證明，亦不能否證的命題（〈哥德爾不完備定理〉）。一個公理系統的公理與其說是不證自明，說是不能證明更加準確。可是在邏輯上，推翻這類命題的唯一方法是假設命題成立，導出矛盾，因此質疑公理是否有效並不能推翻數學理論。歐幾里德的平行公設（Parallel postulate）（Euclid 2）亦受過數學家質疑，後來更有數學家發現平行公設並不必然成立。儘管如此，歐幾里德的幾何依然成立，只不過數學上多了非歐幾何這一假設平行公理不成立的幾何學。正因為有嚴謹精密的論證支持，數學理論才能經歷多人質疑而屹立不倒。

我覺得學習數學就像柏拉圖洞喻中的囚犯逃離洞穴的過程（Plato 6–7），我學習新的概念，理解定理證明，自行證明以往視為不證自明的命題，希望認識更多數學上的真理。在這過程中，我試過失敗，試過花費多日依然一事無成。可是我依然熱愛數學，無他，單純喜愛數學的美，以及享受靈光一閃，以嶄新角度解決難題的滿足感而已（Poincaré 172–173）。

徵引書目

Euclid. *Euclid's Element*. Trans. T. L. Heath, Ed. D. Densmore. New Mexico: Green Lion Press, 2002, 2010.

Lindberg, D. C. *The Beginnings of Western Science*. 2007. Rpt. in *In Dialogue with Nature: Textbook for General Education Foundation Programme*. Eds. Chi-wang Chan, Wai-man Szeto, and Wing-hung Wong. 2nd ed. Hong Kong: Office of University General Education, The Chinese University of Hong Kong, 2012. 11–47.

Plato. *Republic*. 2004. Trans. C.D.C. Reeve. Rpt. in *In Dialogue with Nature: Textbook for General Education Foundation Programme*. Eds. Chi-wang Chan, Wai-man Szeto, and Wing-hung Wong. 2nd ed.Hong Kong: Office of University General Education, The Chinese University of Hong Kong, 2012. 5–9.

Poincare, H. *Science and Method*. 2001. Rpt. in *In Dialogue with Nature: Textbook for General Education Foundation Programme*. Eds. Chi-wang Chan, Wai-man Szeto, and Wing-hung Wong. 2nd ed. Hong Kong: Office of University General Education, The Chinese University of Hong Kong, 2012. 161–178.

〈哥德爾不完備定理〉。《維基百科：自由的百科全書》。瀏覽

日期：2014年4月25日。

〈策梅洛－弗蘭克爾集合論〉。《維基百科：自由的百科全書》。瀏覽日期：2014年4月25日。

〈歐拉猜想〉。《維基百科：自由的百科全書》。瀏覽日期：2014年4月25日。

〈幾何原本〉。《維基百科：自由的百科全書》。瀏覽日期：2014年4月25日。

賽門・辛，《費瑪最後定理》，薛密譯，台灣：商務印書館，2001。

〈邏輯等價〉。《維基百科：自由的百科全書》。瀏覽日期：2014年4月25日。

參考書目

"Galileo's Paradox." *Wikipedia: The Free Encyclopedia*. 25 Apr 2014.

Weisstein, Eric W. "Zermelo-Fraenkel Axioms." *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. n.d. Web. 25 Apr 2014 < http://mathworld.wolfram.com/Zermelo-FraenkelAxioms.html>.

Dunham, W.，《天才之旅 —— 偉大數學定理的創立》，林傑斌譯，台北：牛頓出版股份有限公司，1995。

* * * * * * * * * *

老師短評

閱讀「與自然對話」的文本跟研習數學有甚麼關係？施同學就此問題分享了自己的得着和反思。施同學在論文中從柏拉圖、歐幾里得和龐卡萊的思想出發，於三個方向作出反思，包括：感觀經驗與學習數學的關係、數學研究之方向和數學展現出的智性美 —— 普遍和嚴謹。施同學表現出良好的文本理解。文中亦引用了一些具體的

例子以演繹其觀點，使一般讀者也能夠進入作者筆下的數學世界。（張恆鏘）